# РАБОТА N1. АППРОКСИМАЦИЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

## 1. Метод наименьших квадратов.

Обычно набор экспериментальных данных получается с некоторой погрешностью. В этом случае необходимо провести аппроксимирующую кривую, которая не проходит через экспериментальные точки, но в то же время отражает исследуемую зависимость, сглаживает возможные выбросы, возникшие за счет погрешности эксперимента.

Обозначим узлы исходной таблицы данных через $x_i$, где $0 \le i \le n$ номер узла. Считаем известными значения экспериментальных данных в узловых точках $f(x_i) = f_i$. Введем непрерывную функцию $\varphi(x)$ для аппроксимаци дискретной зависимости $f(x_i)$. В узлах таблицы функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ будут отличаться на величину $\varepsilon_i = \varphi(x_i) - f(x_i)$. Отклонения $\varepsilon_i$ могут принимать положительные и отрицательные значения. Чтобы не учитывать знаки, возведем каждое отклонение в квадрат и просуммируем квадраты отклонений по всем узлам

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2 . \qquad (1.1)$$

Метод построения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$,следуеющий из условия минимума величины $Q$ , называется методом наименьших квадратов (МНК).

В качестве аппроксимирующей функции в зависимости от характера точечного графика выбирается прямая, экспонента и т.д. Когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

Рассмотрим метод нахождения параметров приближающей функции в общем виде на примере функции с тремя параметрами:

$$y = F(x, a, b, c). \qquad (1.2)$$

Итак, имеем: $F(x_i, a, b, c) = \bar{y}_i, i = 1,2,...,n.$ Сумма квадратов разностей соответствующих значений *f* и *F* будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - F(x_i, a, b, c)]^2 = \Phi(a, b, c). \quad (1.3)$$

Эта сумма является функцией Ф(*a, b, c*) трех переменных . Задача сводится к отысканию ее минимума. Используем необходимое условие экстремума:

$$\frac{d\Phi}{da} = 0, \frac{d\Phi}{db} = 0, \frac{d\Phi}{dc} = 0, \quad (1.4), \quad \text{т.е.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - F(x_i, a, b, c)] F'_a(x_i, a, b, c) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i,a,b,c)\right]F_b'(x_i,a,b,c)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i,a,b,c)\right]F_c'(x_i,a,b,c)=0, \qquad (1.5)$$

Решив систему (1.5) относительно параметров *a, b,* и *c*, мы и получим конкретный вид искомой функции *F*(*x, a, b, c*). Как видно из рассмотренного примера, изменение количества параметров выразиться лишь в изменении количества уравнений в системе (1.5).

Найденные значения функции *F*(*x, a, b, c*) в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут отличаться от табличных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Значениия разностей

$$y_1 - F(x_1,a,b,c)=\varepsilon_1(i=1,2,\ldots,n) \qquad (1.6)$$

называются *отклонениями* (или *уклонениями*) измеренных значений *y* от вычесленных по формуле (1.6) в соответствии с исходными данными. Следовательно можно найти сумму квадратов отклонений,

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^2, \qquad (1.7)$$

которая в соответствии с принципом наименьших квадратов для заданного вида приближающей функции (и найденных значений параметров *a, b,* и *c*) должна быть наименьшей.

Задание к работе: массив данных (задается преподавателем) аппроксимировать уравнением прямой линией :

$F( x, a, b)= ax+b.$

После нахождения неизвестных коэффициентов аппроксимирующей функции, отбраковать из массива точки отклонение которых больше полутора (двух) среднеквадратичных и аппроксимировать оставшийся массив. Постротить график аппроксимирующей функции и исходые точки с помощью графических пакетеов или FORTRAN- графики.

## РАБОТА N2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ КУБИЧЕСКИМ СПЛАЙНОМ

В данном разделе рассматриваются вопросы интерполяции функции одной переменной, заданной табличным способом , т.е. когда по известным значениям некоторой функции $f_i=f(x_i)$, заданным в несовпадающих точках $x_i(i= 0,1,\ldots,N)$, называемых узлами, требуется определить приближенное значение *f(x)* в произвольной точке *x*. В дальнейшем будем предполагать, что значения $x_i$ являются возрастающими, непрерывный аргумент $x\in[x_0,x_N]$, т.е. функция *f=f(x)* непрерывна вместе со своими производными до порядка n включительно.

Наибольшее распространение среди интерполирующих сплайнов получил сплайн третьей степени (кубический сплайн), среди

аппроксимирующих - локальные сплайны (или B-сплайны) [2]. Кубический сплайн проходит через все узловые точки, при этом все точки “влияют” на любой участок интерполирующей функции. Вид локального сплайна на каком-либо участке определяют только соседние узловые тоочки, и он в общем случае не проходит через узлы.

Рассмотрим способы интерполяции таблично заданных функций с помощью кубического сплайна и локальных B-сплайнов (Работа N3).

### 2.1. Кубический сплайн

На каждом из интервалов $[x_{n-1}, x_n], 1 \le n \le N$ таблично заданной функции $fi(i = 0,1,...,N)$ кубический сплайн представляется полиномом третьей степени

$$S_n(x) = \sum_{\ell=0}^{3} a_{en}(x_n - x)^e, n = 1,2,..., N \qquad (2.1.1)$$

Из требования интерполяции, а также равенства самой сплайн-функции $S_n(x)$ (отсутствие разрывов линии), ее первых (отсутствие изломов) и вторых (отсутствие скачков кривизны) производных на границах соседних интервалов можно получить *4N-2* уравнений для *4N* неизвестных:

$$a_{on} = f_n, n = 0,1,..., N$$
$$a_{on} + a_{1n}h_n + a_{2n}h_n^2 + a_{3n}h_n^3 = f_{n-1}, n = 2,3,..., N$$
$$a_{on} + 2a_{2n}h_n + 3a_{3n}h_n^2 = a_{1,n-1}, n = 2,3,..., N$$
$$2a_{2n} + 6a_{3n}h_n = 2a_{2,n-1}, n = 2,3,..., N \qquad (2.1.2)$$

где $h_n = x_n - x_{n-1}$.

Для замыкания системы (2.1.2) задаются значения вторых производных (кривизны) на концах отрезка интерполяции :

$$S_1^2(x_o) = C_o, S_n^{(2)}(x_n) = C_1$$

или

$$3a_{31}h_1 + a_{21} = C_o / 2$$
$$a_{2N} = C_1 / 2 \qquad (2.1.3)$$

Из (2.1.2) и (2.1.3) получаются выражения для определения неизвестных:

$$a_{3n} = \frac{a_{2,n-1} - a_{2n}}{3h_n}, n = 1,2,..., N \qquad (2.1.4)$$

где $a_{2o} = c_o / 2$,

$$a_{1n} = -\frac{h_n}{3}(a_{2,n-1} + 2a_{2n}) + \frac{f_{n-1} - f_n}{h_n} \qquad (2.1.5)$$

$$h_n a_{2,n-1} + 2(h_n + h_{n+1})a_{2n} + h_{n+1}a_{2,n+1} = F_n \qquad (2.1.6)$$

где $F_n = 3\left[\frac{f_{n-1} - f_n}{h_n} - \frac{f_n - f_{n+1}}{h_{n+1}}\right], a_{2o} = c_o / 2, a_{2N} = c_1 / 2$

Трехдиагональная система уравнений (2.1.6) решается методом прогонки [1] .

Рассмотрим суть этого метода на примере системы с трехдиагональной матрицей общего видда

$$A_j Z_{j-1}+C_j Z_j +B_j Z_{j+1}=F_j \ , j = 1, 2,..., N-1 \ . \quad (2.1.7)$$
$$Z_0 =K_1 , \ Z_N=K_2$$

Подставим значение $Z_0$ в первое уравнение систнмы (2.1.7). Получим

$$C_1 Z_1+B_1 Z_2 = F_1-A_1 K_1$$

или

$$Z_1=\alpha_1 Z_2+\beta_1 \quad \alpha_1= - \frac{B_1}{C_1} \ , \ \beta_1=\frac{F_1-A_1 K_1}{C_1} \quad .$$

Полученное $Z_1$ подставим в следующее уравнение и т. д. Пусть найдено

$$Z_{k-1} = \alpha_{k-1} Z_k +\beta_{k-1} , \ k<N-1 .$$

Подставив его в $k$-е уравнение получим

$$A_k(\alpha_{k-1} Z_k +\beta_{k-1}) + C_k Z_k +B_k Z_{k+1}=F_k$$

или

$$Z_k = \alpha_k Z_{k+1} +\beta_k \ ;$$
$$\alpha_k = -\frac{B_k}{C_k+A_k\alpha_{k-1}}; \beta_k = \frac{A_k\beta_{k-1}-F_k}{C_k+A_k\alpha_{k-1}} \quad .$$

При этом значения $\alpha_0$ и $\beta_0$ определяются из левого граничного условия $Z_0 =K_1$ , для чего достаточно положить $\alpha_0=0$ и $\beta_0= K_1$. Таким образом все $\alpha_k$ и $\beta_k$ определяются из рекурентных соотношений. Процесс их вычисления называется прямой прогонкой, а сами коэффициенты называются прогоночными. При этом левое граничное решение ‘‘перегоняется’’ на правую границу.

После вычисления прогоночных коэффициентов, используется правое граничное условие $Z_N=K_2$ и определюется все неизвестные значения (обратная прогонка)

$$Z_k = \alpha_k Z_{k+1} +\beta_k , \ к = N-1, N-2, \ ... \ , 1.$$

После того как найдены все $a_{2n}$ , из (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) определяются все остальные неизвестные. Имея массив коэффициентов (по четыре коэффициента для каждого участка), можно определить значение функции по формуле (2.1.1) в любой точке.

Задание к лабораторной работе: для функции $C_x=f(M)$, заданной в виде графика (см. задание к лабораторной N6), выбрать необходимое колличество узловых точек. Исходные данные представить в виде таблицы. В процессе решения найти значения в промежуточных точках, а в тестовом примере и в узлах таблицы. (Обратите внимание, что программа должна содержать блок, определяющий номер участка по его координате $x$). По полученным данным

построить график и проанализировать поведение интерполируемой функции. Массив коэффициентов сохранить для использования при выполнении работы N6.

## РАБОТА N3. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ЛОКАЛЬНЫМ В-СПЛАЙНОМ .

Вопросы аппроксимации таблично заданной функции с помощью локальных В-сплайнов рассмотрим для единичного отрезка $x \in [0,1]$ и постоянного шага таблицы *h=1/N.* Заметим, что произвольный отрезок $[x_o, x_k]$ легко приводится к единичному заменой переменной

$$\bar{x} = \xi = \frac{x - x_o}{x_k - x_o}.$$

Рассмотрим два В-сплайна третьей степени второго $B_2(x)$ и четвертого $B_4(x)$ порядков точности на гладких функциях, в основу которой положен так называемый стандартный В-сплайн третьей степени

$$B_S(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{2}|x|^3, & |x| \le 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3, & 1 \le |x| \le 2, \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Локальный сплайн второго порядка точности имеет вид :

$$B_2(\bar{x}) = \sum_{n=-1}^{N+1} f_n B_s\left(\frac{\bar{x} - nh}{h}\right) \qquad (3.2)$$

Смысл формулы (3.2) заключается в том, что значение функции при какой-либо координате x определяется как сумма значений *fn* в нескольких соседних узлах, взятых с весовым множителем *Bs* , определяемым формулой (3.1) (*Bs* меньше единицы, причем уменьшается по мере удаления от рассматриваемой точки).

Значения функции *f* в дополнительных узлах (так называемых фиктивных точках) таблицы получаются линейной экстраполяцией

$f_{-1} = 2f_o - f_1, f_{N+1} = 2f_N - f_{N-1}$ .

Локальный сплайн четвертого порядка точности имеет вид:

$$B_4(\bar{x}) = \sum_{n=-1}^{N=+1} \frac{8f_n - f_{n+1} - f_{n-1}}{6} B_s\left(\frac{\bar{x} - nh}{h}\right) \qquad (3.3)$$

где: $f_{-1} = 4f_o - 6f_1 + 4f_2 f_3$,

$f_{-2} = 10f_o - 20f_1 + 15f_2 - 4f_3$,

$f_{N-1} = 4f_n - 6f_{n-1} + 4f_{N-2} - f_{N-3}$,

$f_{N-2} = 10f_n - 20f_{n-1} + 15f_{N-2} - 4f_{N-3}$ ,

- значения функции в дополнительных точках.

Задание к лабораторной работе: проинтерполировать локальными сплайнами второго и четвертого порядка точности функцию $C_x=f(M)$, заданную в виде графика (см. задание к лабораторной N6). Выбрать необходимое колличество узловых точек, ввод данных осуществить в виде таблицы. В процессе решения найти значения в промежуточных точках, а в тестовом примере в узлах таблицы. По полученным данным построить график, на котором будут исходные узловые точки, а также функции полученные с помощью B-сплайнов второго и четвертого порядков точности. Проанализировать поведение функций.